# Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

## CONCOURS D'ENTRÉE 1980

# MATHEMATIQUES

## 2ème épreuve (4h.)

Dans tout le problème, p est un réel donné appartenant à l'intervalle ouvert ]0 ; 1[ ; on note $q = 1-p$.
On désigne par a et b deux nombres réels, solutions du système (1) suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} a + b = q \\ ab = -pq \end{cases}$$

**Préliminaires**

**0.1.** Montrer que le système (1) admet une solution (a,b) telle que :
$a \neq b$, $|a| < 1$, $|b| < 1$.
Montrer que a ou b peut être égal à p et déterminer alors numériquement a, b, p.

**0.2.** Montrer que quel que soit p, le système (S) suivant, où n désigne un entier naturel, admet au moins une solution (x, y, z).

$$(S)\quad \begin{cases} x + ay + a^2z = a^n \\ x + by + b^2z = b^n \\ x + py + p^2z = p^n \end{cases}$$

Montrer que toute solution vérifie $y + qz = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$.

**Première Partie**

On note :

$\mathbb{R}[X]$ l'algèbre sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels,

$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3)$ l'algèbre sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 3 réelles.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(2)\quad \begin{cases} u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = q \\ \forall\, n, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+3} = u_{n+2} - p^2 q\, u_n. \end{cases}$$

On note $V_n$ la matrice colonne $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3)$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p^2q & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.../...

**1.1.** Montrer que :

$\forall\, n, n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} = A\, V_n$

$\forall\, n, n > 1,\ V_n = A^{n-1}\, V_1$

**1.2.** Déterminer le polynôme caractéristique $P_A$ de la matrice A.
Montrer que les valeurs propres de A sont a, b et p.
La matrice A est-elle diagonalisable quel que soit p ?

**1.3.** Soit $R_n = \alpha_n + \beta_n X + \gamma_n X^2$ le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, du polynôme $X^n$, $n \in \mathbb{N}$, par le polynôme caractéristique $P_A$ de la matrice A.

Montrer que $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ est solution du système (S) défini dans la question 0.2.

**1.4.** On désigne par $\phi$ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3)$ telle que tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ (n étant le degré de P)

a pour image par $\phi$ la matrice :

$\phi(P) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3)$.

a - Montrer que $\phi$ est linéaire et que $\phi(PQ) = \phi(P)\,\phi(Q)$ quels que soient P et Q, éléments de $\mathbb{R}[X]$.

b - Vérifier que $\phi(P_A) = 0$ ($P_A$ polynôme caractéristique de A), où 0 désigne l'élément neutre de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3)$.

c - En déduire successivement :

$\forall\, n, n \in \mathbb{N} \qquad A^n = \alpha_n I + \beta_n A + \gamma_n A^2$

$\forall\, n, n \in \mathbb{N}^* \qquad V_n = \alpha_{n-1} V_1 + \beta_{n-1} V_2 + \gamma_{n-1} V_3$

(3) $\forall\, n, n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}$.

## Deuxième Partie

soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même loi, telles que :

$\forall\, k, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = 0) = 1 - p = q$.

La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ s'interprète comme une suite d'épreuves se soldant par un succès $(X_k = 1)$ ou par un échec $(X_k = 0)$.
On signale que la question 2.3. est indépendante des questions 2.1. et 2.2.

**2.1.** a - On définit la variable aléatoire $Z_2$ : nombre d'échecs précédant le 2ème succès.
Calculer la probabilité de l'événement : $Z_2 = n-2$, $n \geqslant 2$.
(On remarquera qu'il s'agit de l'événement : «obtenir le deuxième succès à la nième épreuve»).

. . . /. . .

b - Etant donné un entier naturel r, $r \geqslant 2$, on considère la variable aléatoire $Z_r$ «nombre d'échecs précédant le $r^{ième}$ succès». Calculer la probabilité de l'événement $Z_r = n-r, n \geqslant r$.

**2.2.** On définit les r variables aléatoires suivantes :

$Y_1$ : nombre d'échecs précédant le premier succès,

$Y_2$ : nombre d'échecs obtenus entre le premier et le second succès,

etc...

$Y_r$ : nombre d'échecs entre le $(r-1)^{ième}$ succès et le $r^{ième}$ succès.

a - Calculer la probabilité $s_k$ de l'événement $Y_1 = k$, $k \in \mathbb{N}$.

Vérifier que $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = 1$.

b - Calculer la probabilité de l'événement $Y_2 = k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exprimer la variable aléatoire $Z_r$ (définie dans 2. 1. b) en fonction de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$.

c - En déduire l'espérance mathématique et la variance de $Z_r$.

**2.3.** Si dans une suite d'épreuves on obtient deux succès consécutifs, on dit qu'on a réalisé un «doublé».

n étant un entier naturel , $n \geqslant 2$ , on considère les évènements suivants :

$A_n$ est l'événement : «le premier doublé est obtenu par un succès à la $(n-1)^{ième}$ épreuve et un succès à la $n^{ième}$ épreuve».

C'est aussi l'événement :

$$(X_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 1) \text{ et } \left[(\forall k, k \in \mathbb{N}^*) \ (k < n) \Rightarrow (X_{k-1} = 0 \text{ ou } X_k = 0)\right].$$

$B_n$ est l'événement : «un doublé au moins est réalisé dans les n premières épreuves».

C'est aussi l'événement :

$$(\exists k, k \in \mathbb{N}^*) \ (k \leqslant n) \text{ et } (X_{k-1} = 1 \text{ et } X_k = 1).$$

On désigne par $p_n$ la probabilité de l'événement $A_n$ et on pose $p_1 = 0$.

a - Calculer $p_2, p_3$

Montrer que la probabilité de l'événement $B_n$ est $\sum_{k=1}^{n} p_k$.

En déduire la relation :

$$\forall n, n \in \mathbb{N}^*, p_{n+3} = p^2 q \left[1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right].$$

b - Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est solution de l'équation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall n, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+3} = u_{n+2} - p^2 q \, u_n.$$

En utilisant les résultats de 2.3.a - et la relation (3) du 1.4. établir que :

$$\forall n, n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = p^2 \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail